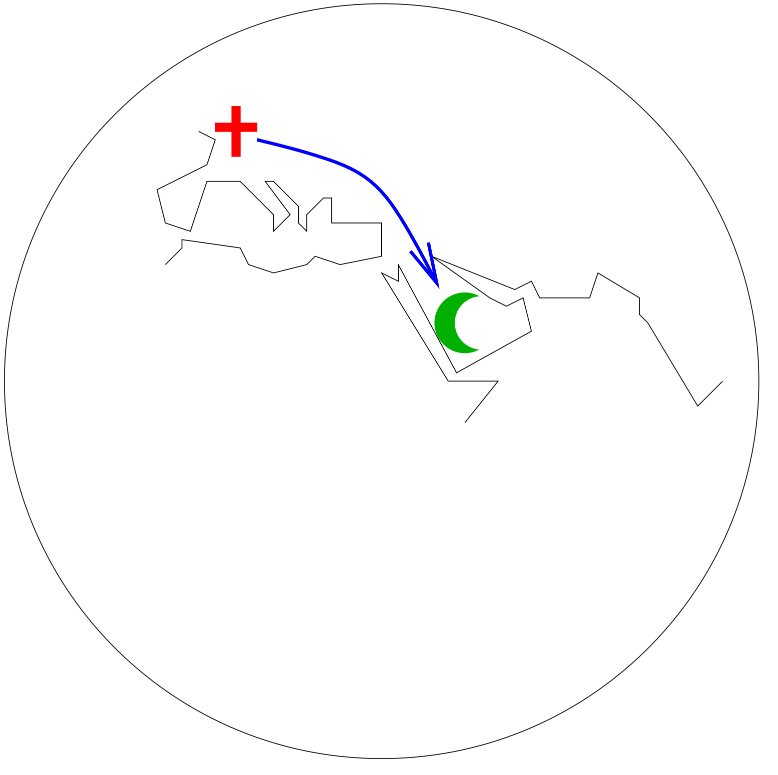
La vie sur une planète non euclidienne

Le problème de la Qibla

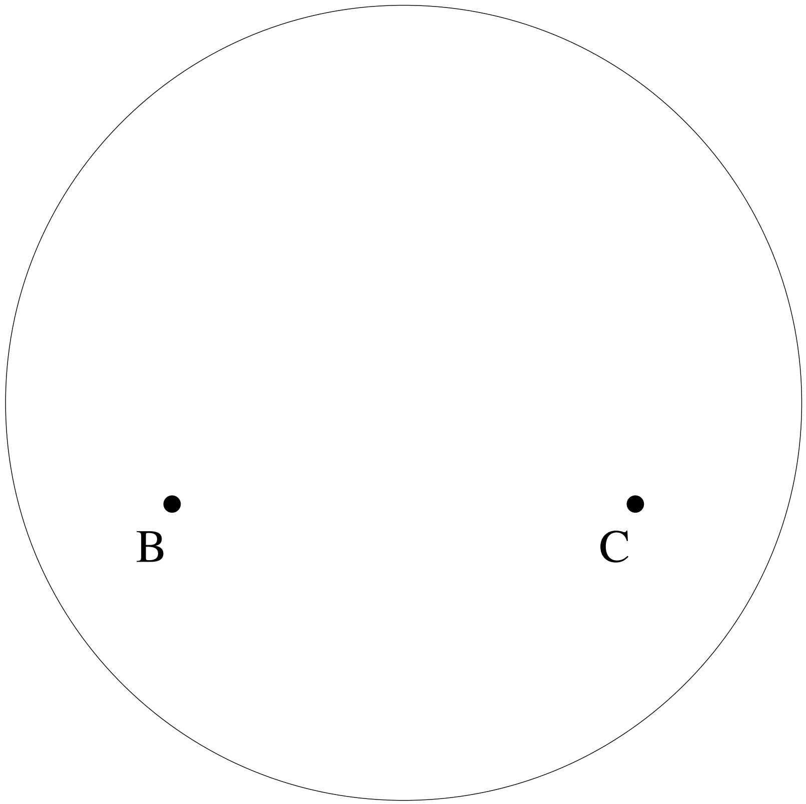
Comment déterminer la direction de la Mecque ?



Grands cercles

Direction=rayon lumineux=plus court chemin

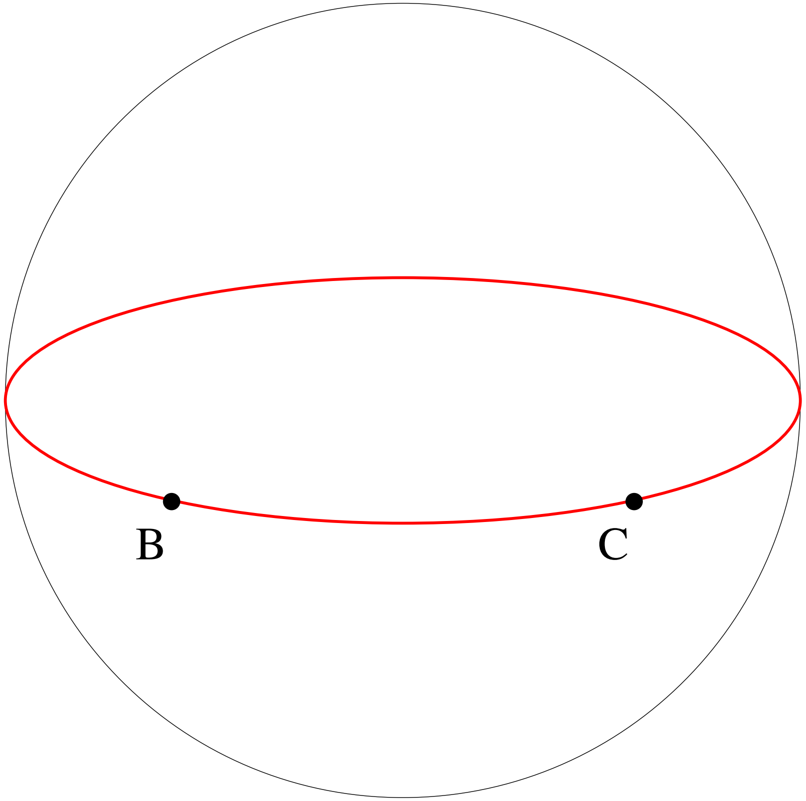
Problème équivalent : comment trouver le plus court chemin d’un point à un autre de la mappemonde ?



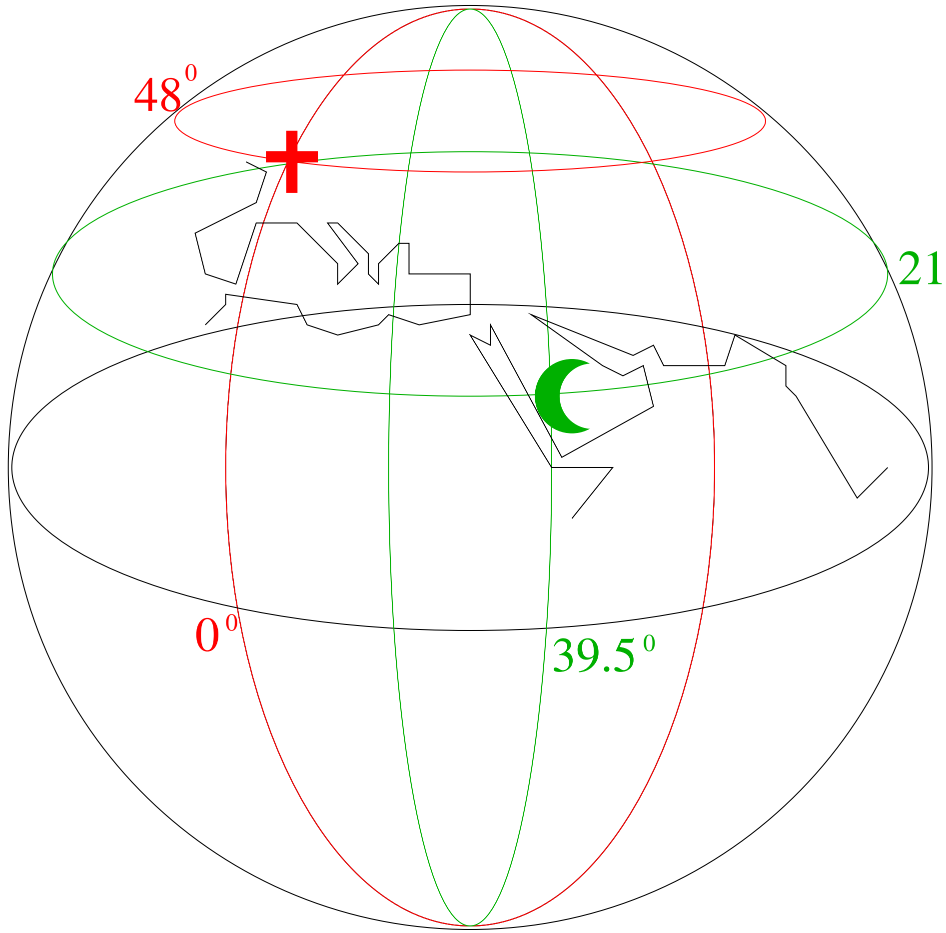
Grands cercles

- Direction=rayon lumineux=plus court chemin

- Problème équivalent : comment trouver le plus court chemin d'un point à un autre de la mappemonde ?



Latitude et longitude



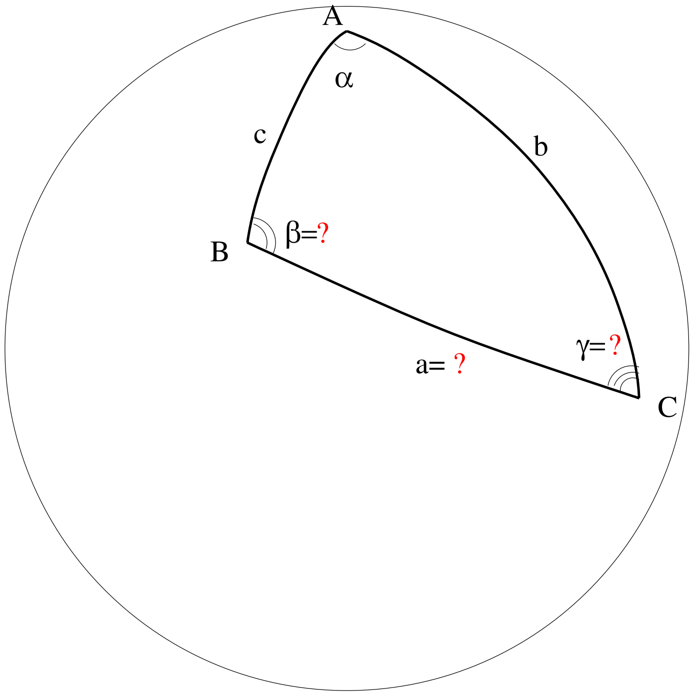
Triangles sphériques

L'intersection de 3 demi-sphères est un triangle T d'angles α, β et γ.

Théorème de Diquet : la somme des angles $\alpha+\beta+\gamma$ d'un triangle sphérique est toujours $>\pi$, et le nombre $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ est l'aire de T.

Problème de la Qibla

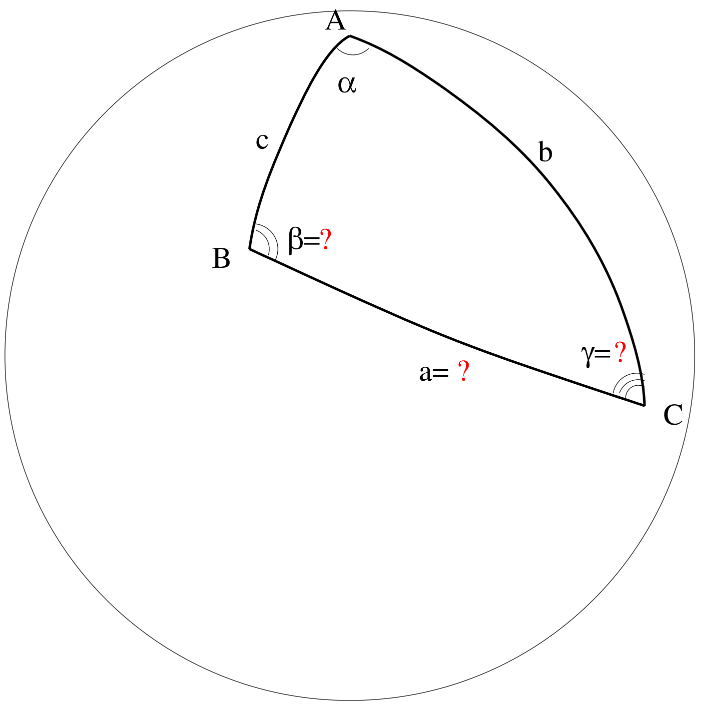
Problème : étant données les latitudes b et c, et la différence des longitudes α, trouver l'angle γ.



Problème de la Qibla

Solution (Habash al-Hasib, IXème siècle) :

$\tan(\gamma)=\sin(\alpha)/(\sin(b)\cot(c)-\cos(c)\cos(\alpha))$.



Triangles paveurs

Soit T un triangle euclidien d'angles α, β, γ. On effectue des symétries par rapport aux côtés, puis on recommence avec les triangles obtenus.

Problème : à quelle condition obtient-on un pavage du plan euclidien ?

Solution : $\alpha = 2\pi/p$, $\beta = 2\pi/q$, $\gamma = 2\pi/r$, où p, q, r sont entiers, et

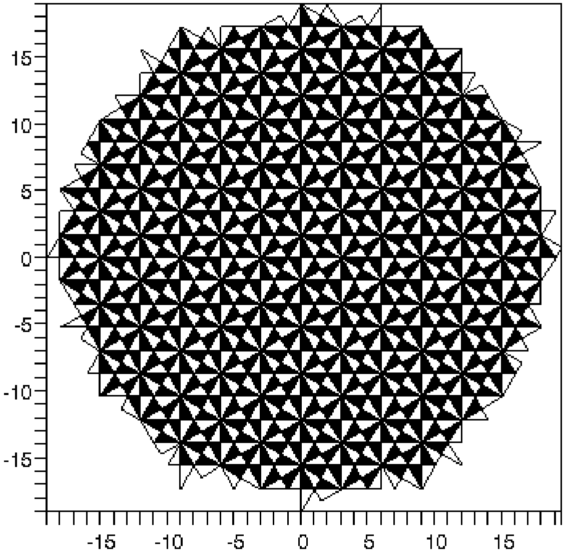
- $1/p + 1/q + 1/r = 1/2$,
- si l'un est impair, les deux autres sont égaux.

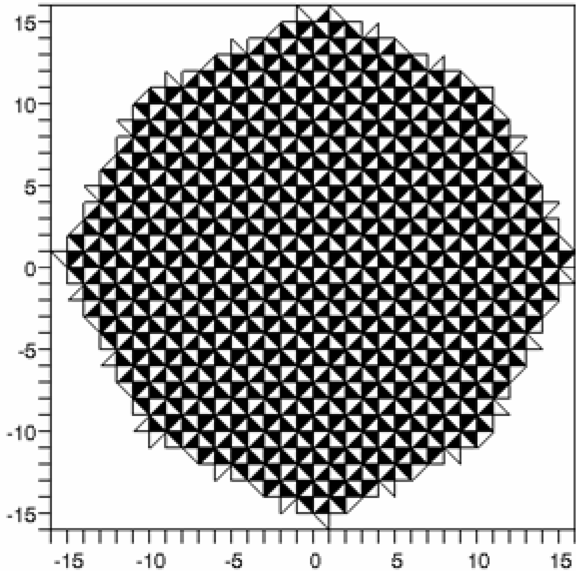
Liste des triangles paveurs du plan

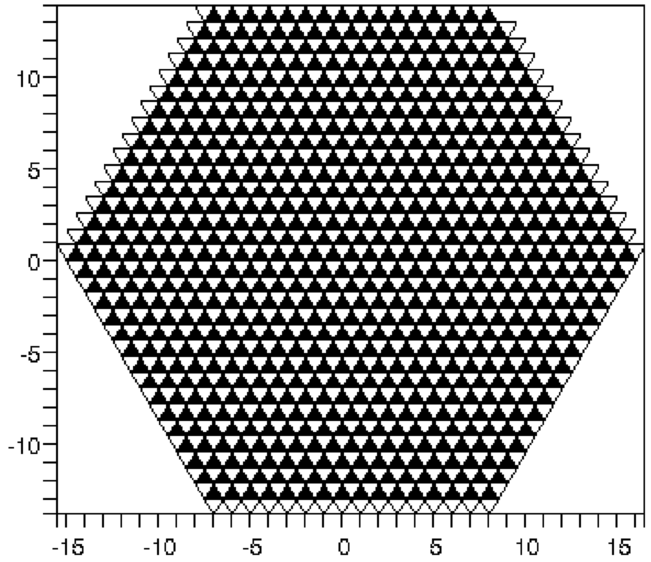
Si p<=q<=r, alors (p,q,r)=

- (3,12,12),
- (4,6,12),
- (4,8,8),
- (6,6,6).

Pavages du plan







4,6,12 4,8,8 6,6,6

Triangles paveurs de la sphère

Soit T un triangle sphérique d'angles α, β, γ. On effectue des symétries par rapport aux côtés, puis on recommence avec les triangles obtenus.

Problème : à quelle condition obtient-on un pavage de la sphère ?

Solution : $\alpha = 2\pi/p$, $\beta = 2\pi/q$,

$\gamma = 2\pi/r$, où p, q, r sont entiers, et

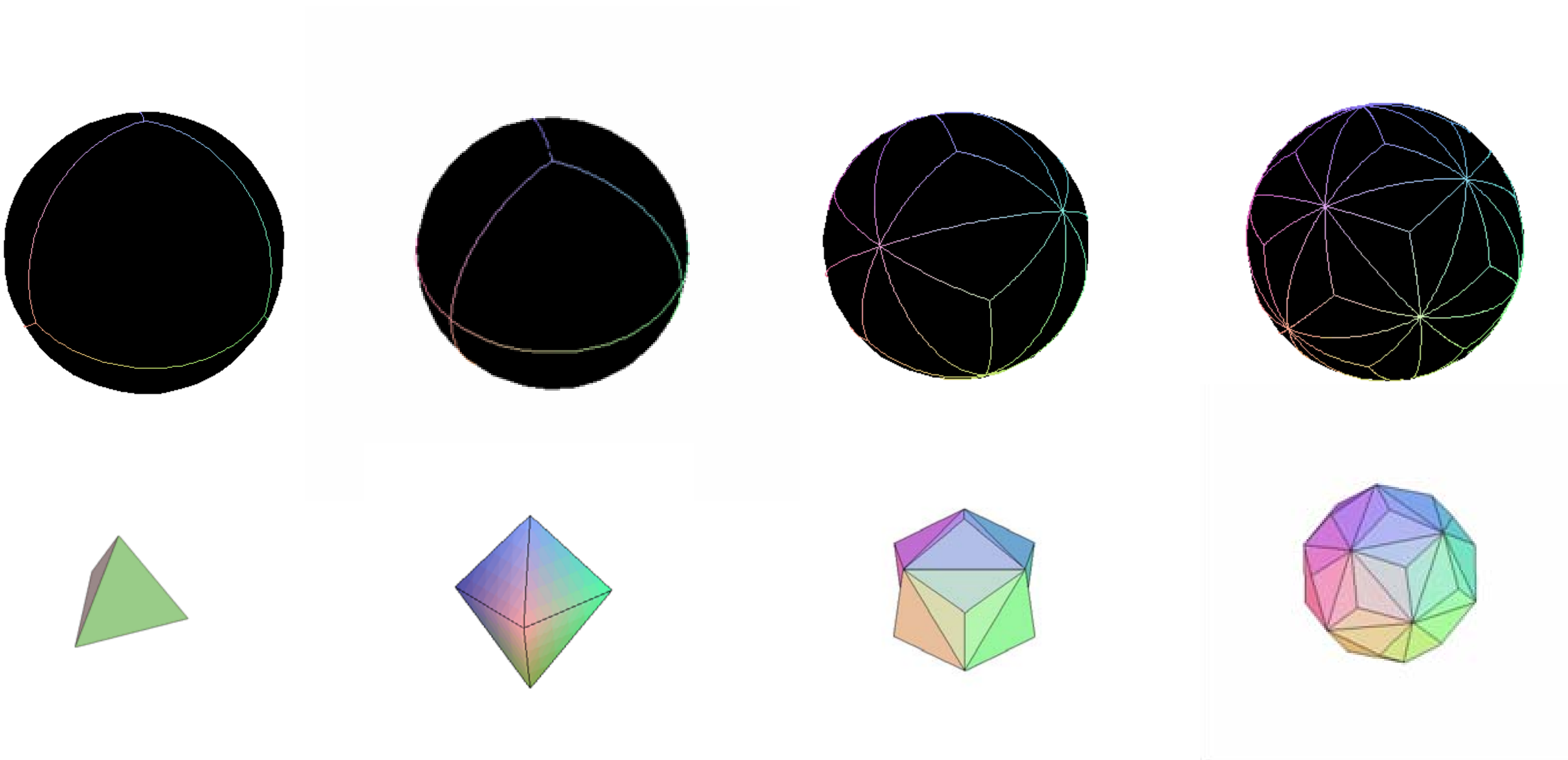
- $1/p + 1/q + 1/r > 1/2$,
- si l'un est impair, les deux autres sont égaux.

Liste des triangles paveurs de la sphère

Si p<=q<=r, alors (p,q,r)=

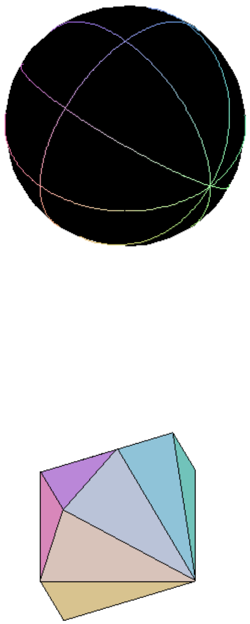
- (3,3,3), (3,4,4), (3,6,6), (3,8,8), (3,10,10),
- (4,4,r), pour tout r>3,
- (4,6,6), (4,6,8), (4,6,10), (4,8,8),
- (5,5,5), (5,6,6).

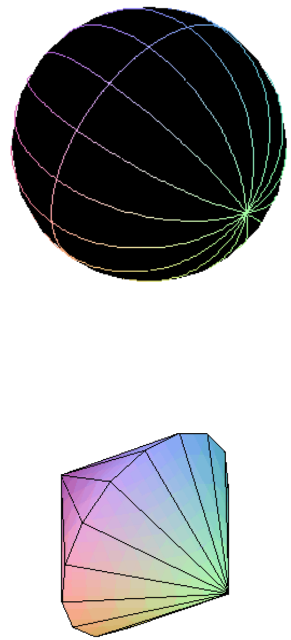
Pavages de la sphère

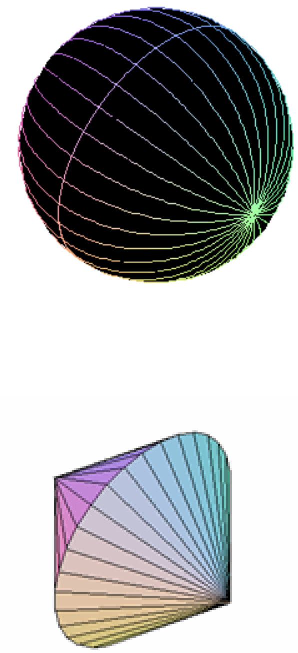


3,3,3 3,4,4 3,8,8 3,10,10

Pavages de la sphère

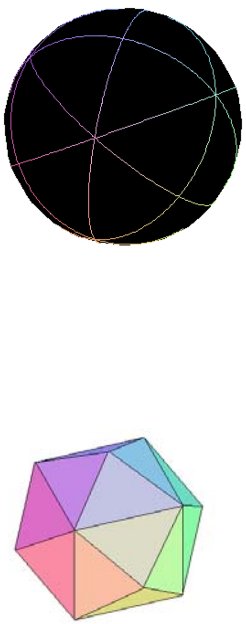




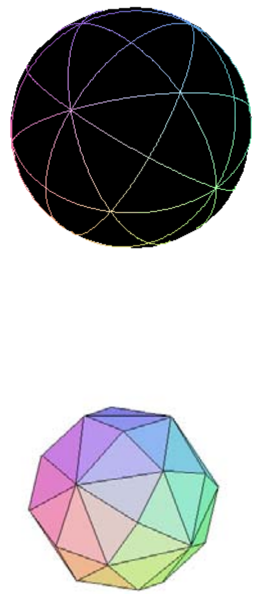


4,4,8 … 4,4,15 … 4,4,30 …

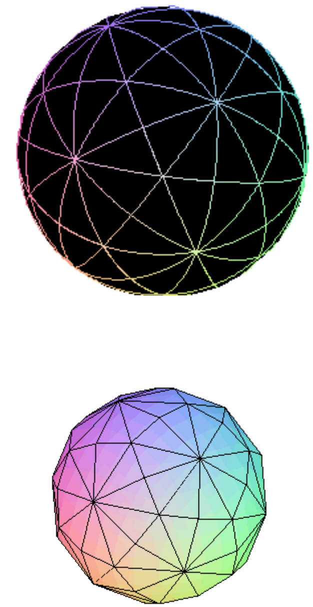
Pavages de la sphère



4,6,6

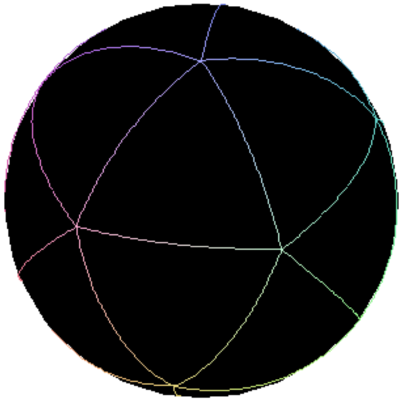


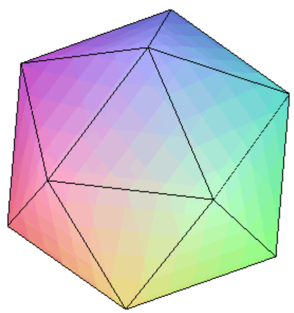
4,6,8

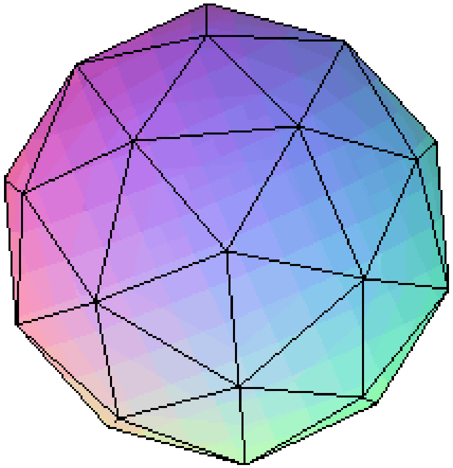


4,6,10

Pavages de la sphère







5,5,5

5,6,6

Problème de l’heure des prières

Comment donner l’heure avec précision la nuit ?

Problème relié : comment un navire perdu au milieu de l’océan détermine-t’il sa longitude ?

L’heure est dans les étoiles

A partir d’un globe céleste, si on connaît la latitude et la longitude du lieu où on est, ainsi que le jour et l’heure, on peut calculer la carte du ciel.

Inversement, si on connaît la latitude et la longitude du lieu où on est, en observant le ciel, on peut en déduire l’heure qu’il est.

L’astrolabe

«Astrolabe signifie le mesureur d'étoiles et c'est, en grec, Astrulabun. Et Astru ce sont les étoiles et Labun c'est le miroir».

Abu Abdallah al-Khwarizmi (Xe siècle).

A quoi ça sert ?

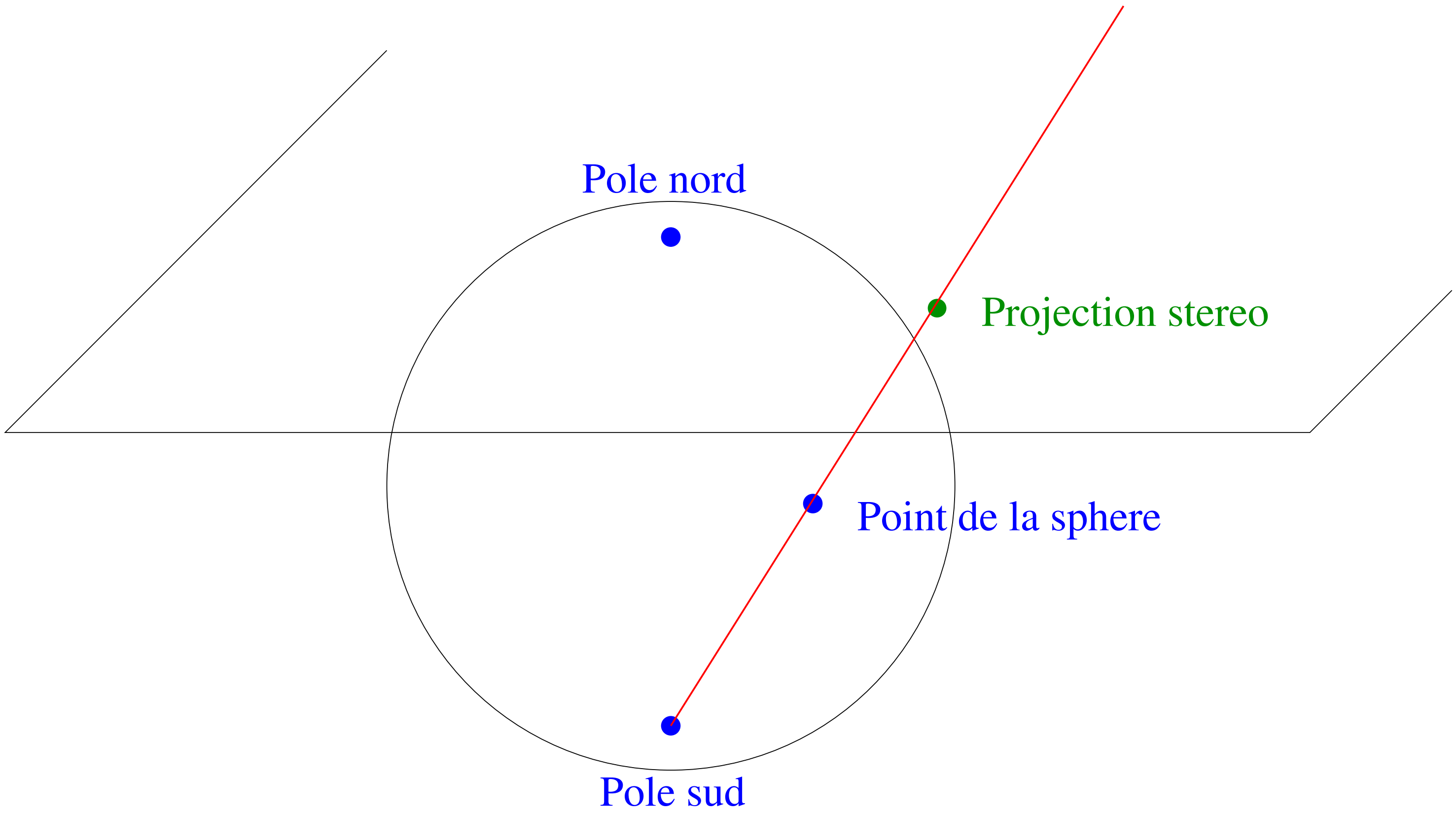
L’astrolabe, décrit pour la première fois par

Théon d'Alexandrie vers 375, est un appareil qui fournit la carte du ciel en un endroit donné pourvu qu’on connaisse l’heure ou la hauteur d’une seul étoile.

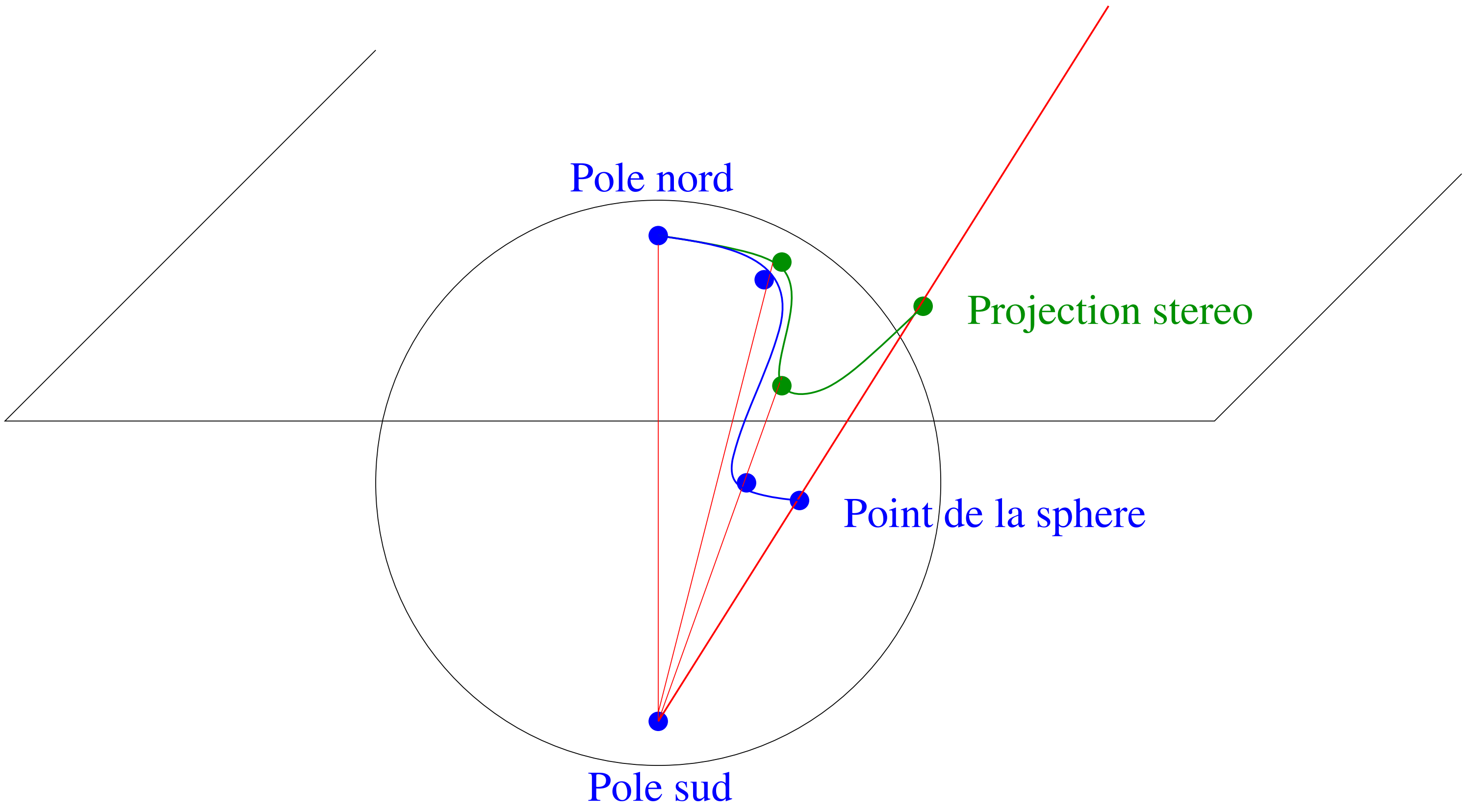
La carte est une projection du ciel sur un plan, au moyen de la projection stéréographique, décrite par *Hipparchos* dès 150 av. J.-C.

Inversement, on observant les étoiles, on peut dire l’heure qu’il est.

Projection stéréographique



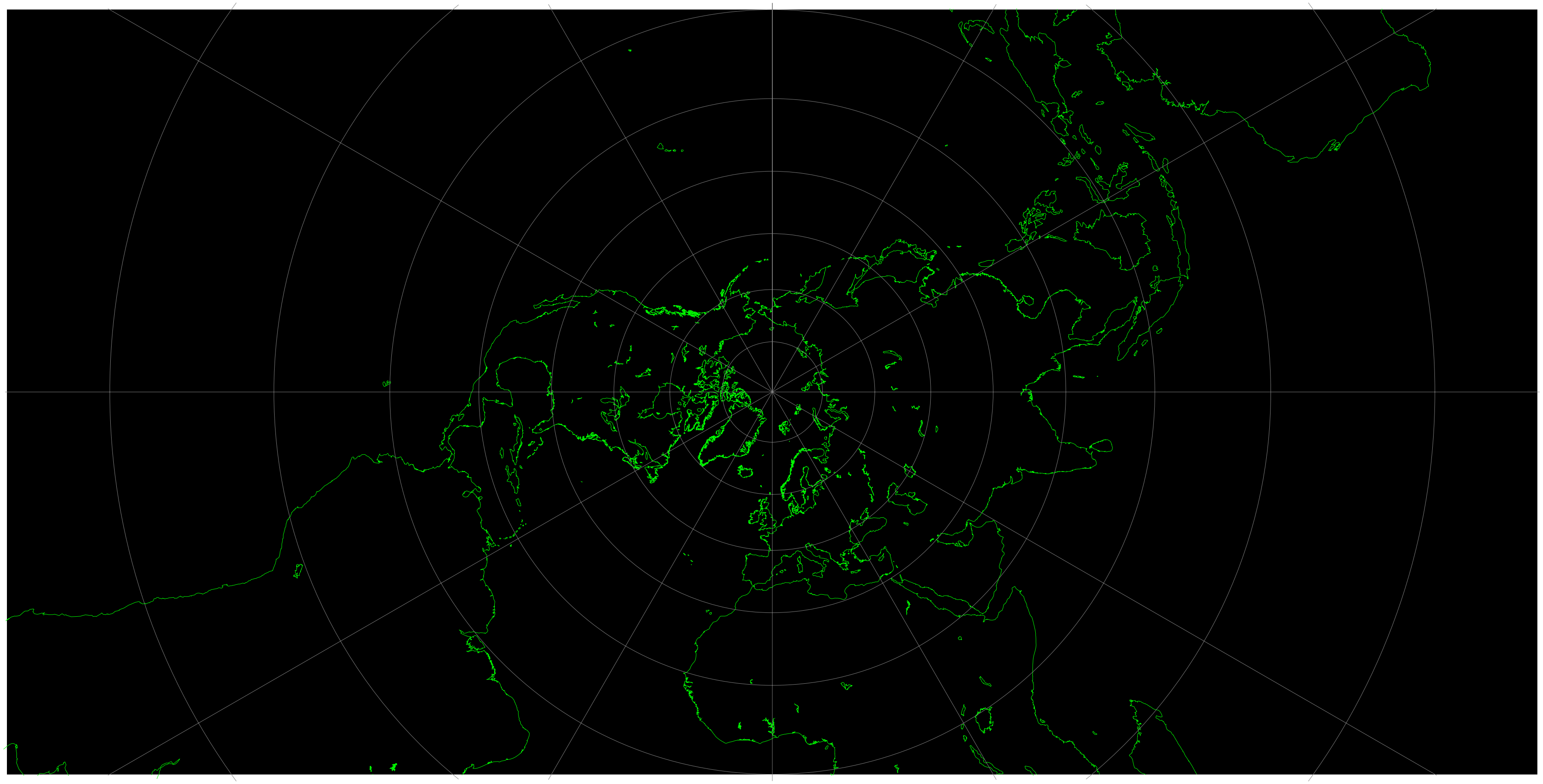
Projection stéréographique



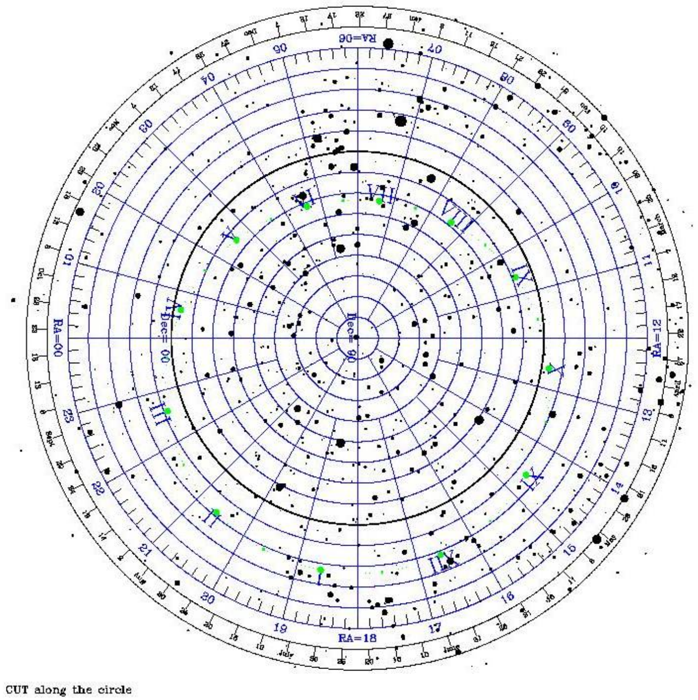
Propriétés

- La projection stéréographique associe à chaque point de la sphère (autre que le pôle sud) un point du plan et réciproquement.
- Elle préserve les angles.
- Elle envoie les cercles de la sphère sur des cercles ou des droites du plan.

Carte stéréographique de la Terre

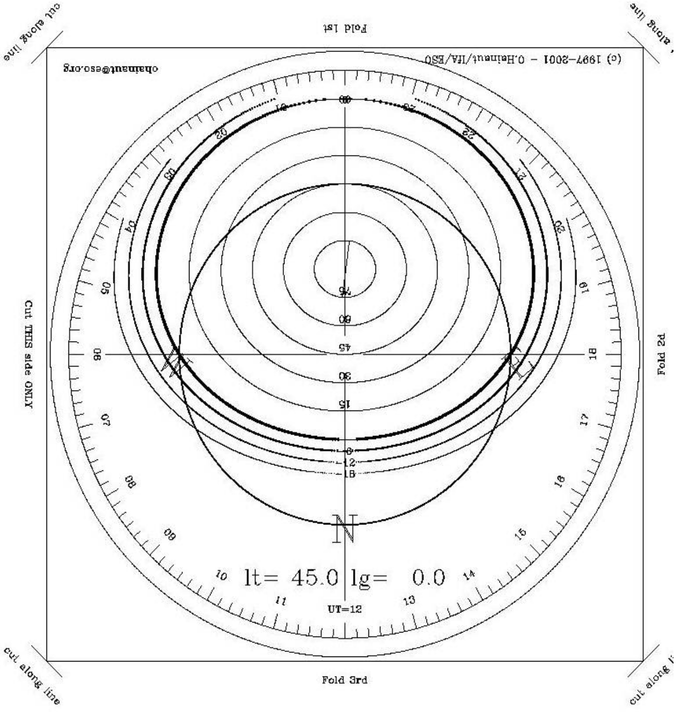


Carte stéréographique du ciel



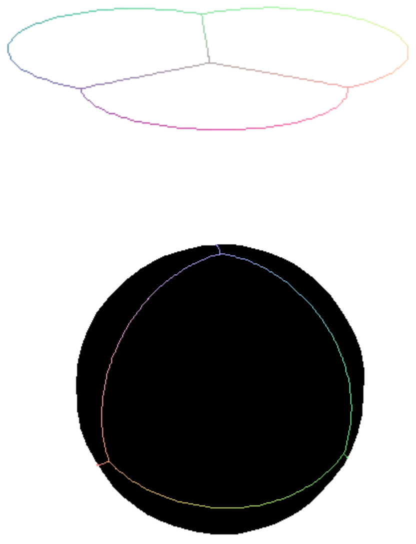
Elle est représentée sur la plaque du dessus, ajourée, de l’astrolabe, appelée araignée.

Carte stéréographique de la partie visible du ciel

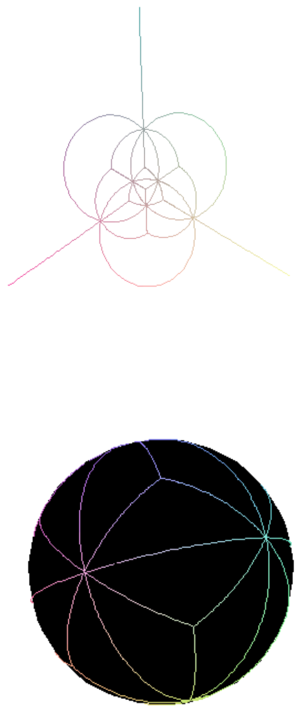


Elle est représentée sur la plaque du dessous, pleine, appelée tympan.

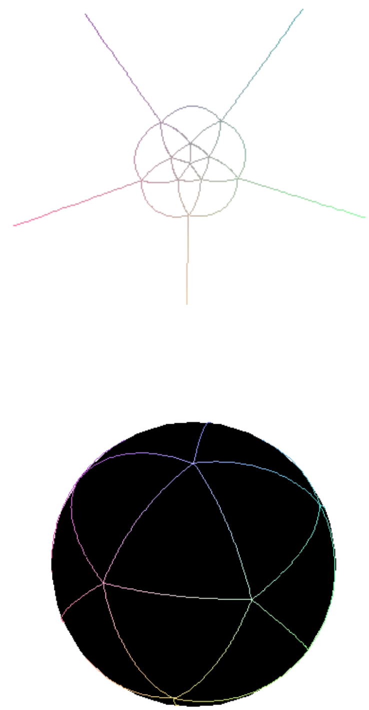
Projection stéréographique d'un pavage de la sphère



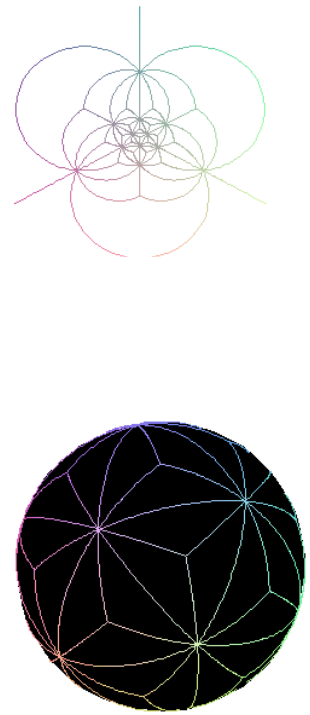
Pavages en stéréo



3,8,8



5,5,5



3,10,10

Changeons de longueur

Le carré de la longueur usuelle du vecteur (x,y,z) vaut

$$q(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 .$$

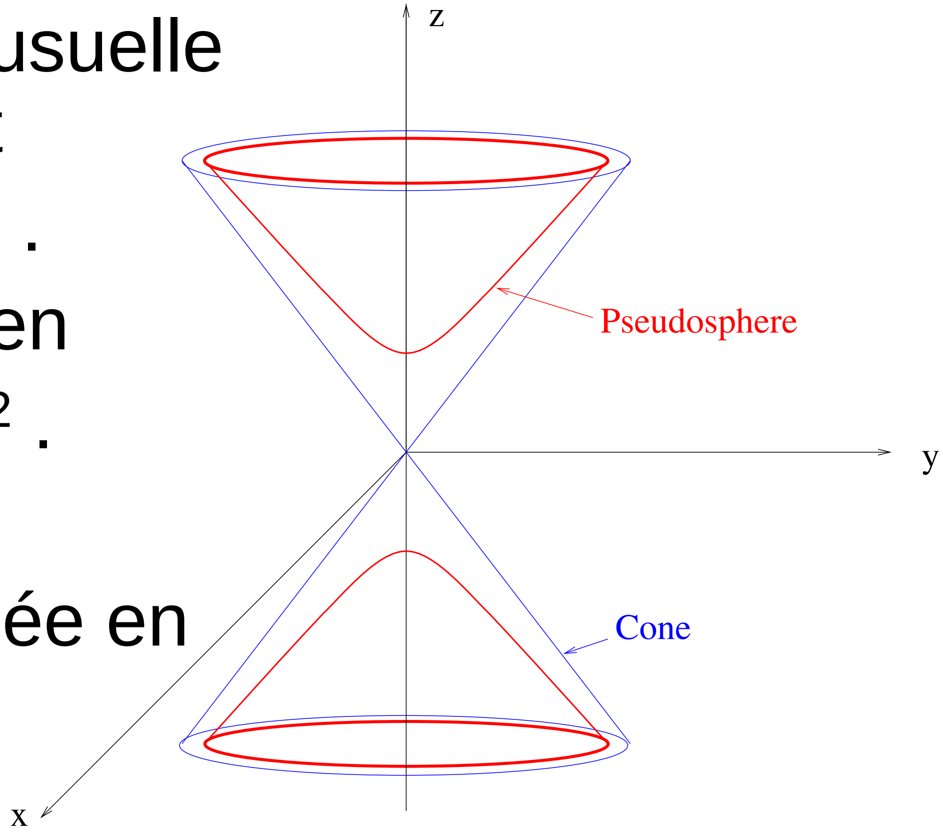
Décidons de changer q en

$$q'(x,y,z) = -x^2-y^2+z^2 .$$

La sphère unité

$\{x^2+y^2+z^2 = 1\}$ est changée en la pseudosphère

$\{-x^2-y^2+z^2 = 1, z>0\}$.



Droites et angles

Dans la pseudosphère, on mesure les longueurs au moyen de -q'. Le plus court chemin entre deux points est contenu dans un plan passant par l'origine.

On calcule des produits scalaires par la formule

$$(x,y,z).(x',y',z')=-xx'-yy'+zz' ,$$

et on en déduit l'orthogonalité et les angles.

Triangles pseudosphériques

L'intersection de 3 demi-espaces avec la pseudosphère est un triangle T d'angles α, β et γ.

Théorème : la somme des angles $\alpha+\beta+\gamma$ d'un triangle pseudosphérique est toujours $<\pi$, et le nombre $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$ est l'aire de T.

Triangles paveurs de la pseudosphère

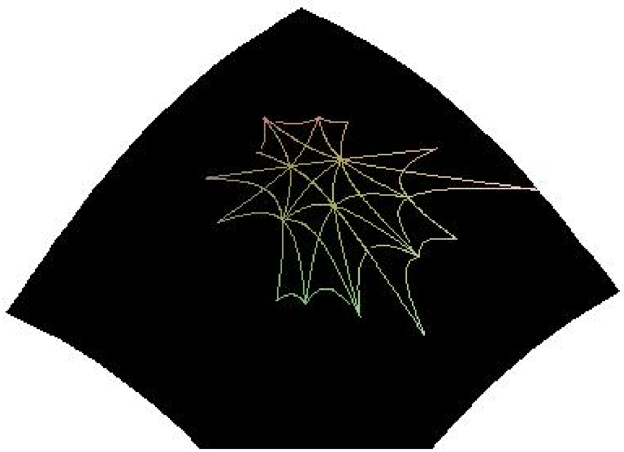
Soit T un triangle pseudosphérique d'angles α, β, γ. On effectue des symétries par rapport aux côtés, puis on recommence avec les triangles obtenus.

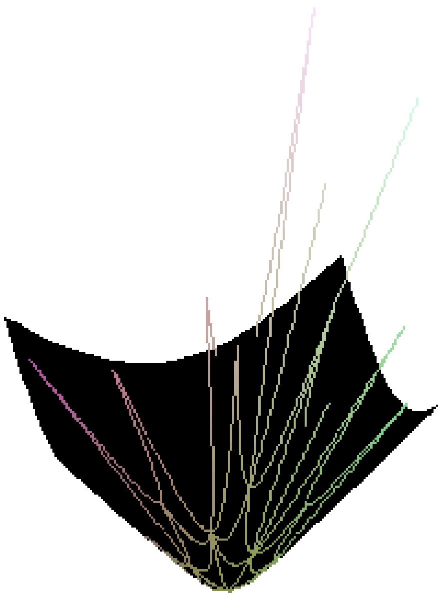
Problème : à quelle condition obtient-on un pavage de la pseudosphère ?

Solution : $\alpha = 2\pi/p$, $\beta = 2\pi/q$, $\gamma = 2\pi/r$, où p, q, r sont entiers, et

- $1/p + 1/q + 1/r < 1/2$,
- si l'un est impair, les deux autres sont égaux.

Pavages de la pseudosphère





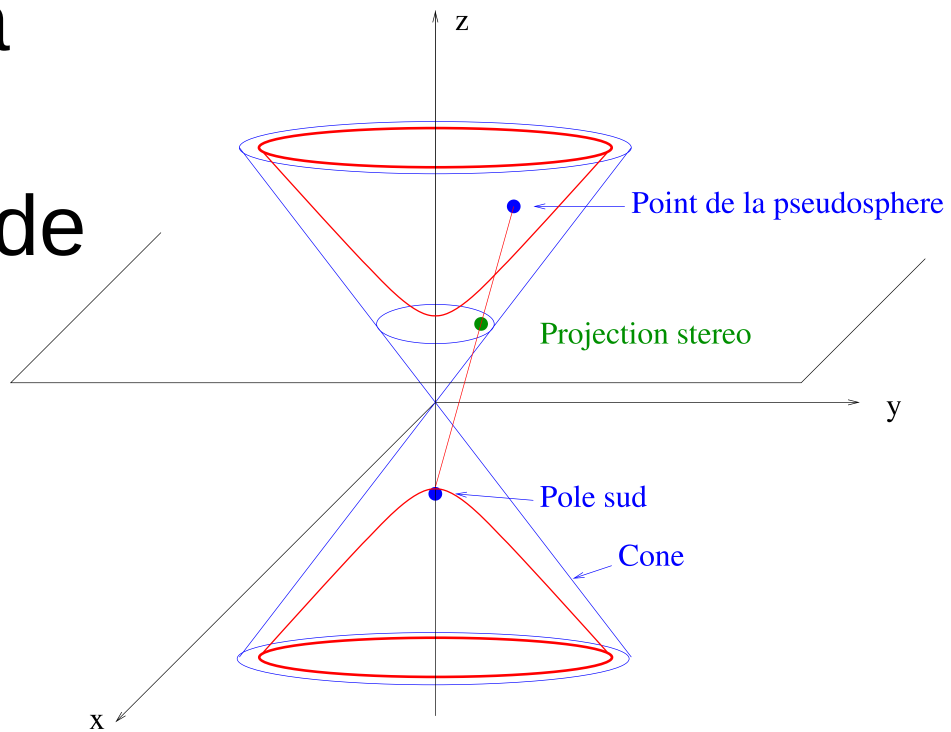
4,8,12

6,8,12

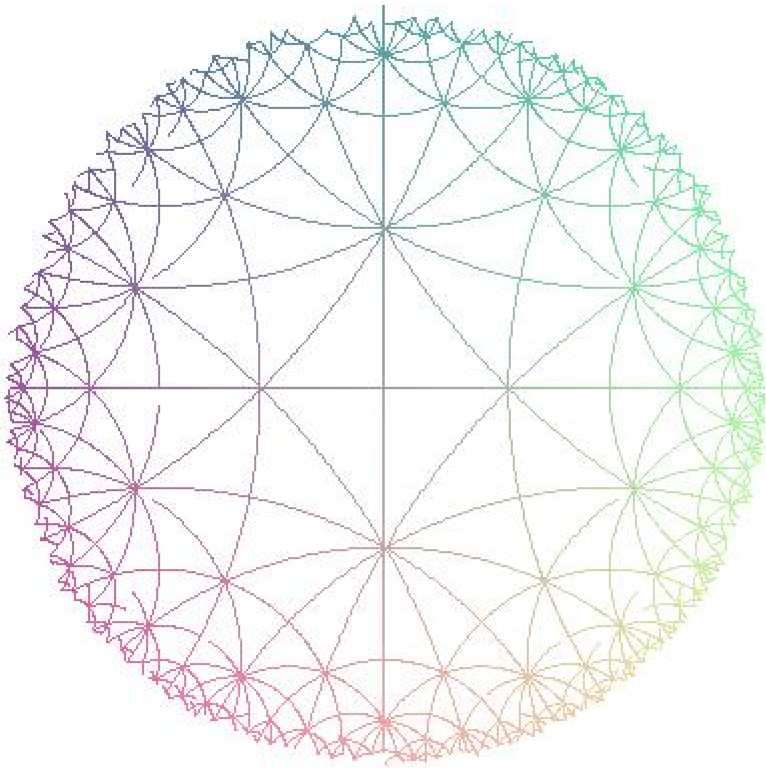
Projection stéréographique

La projection envoie la pseudosphère à l'intérieur du disque de rayon 2.

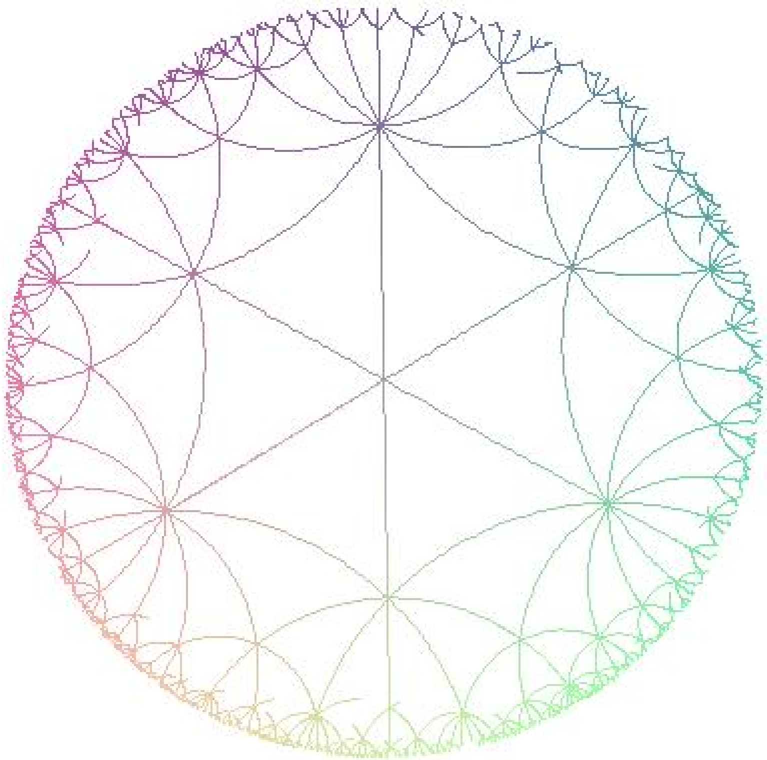
La géométrie obtenue dans le disque s'appelle géométrie hyperbolique.



Pavages en stéréo



4,8,12



6,8,12

Remerciements

- À Nicolas Delyon et Patrick Derbès qui ont écrit les programmes Maple d tracé de pavages, dans le cadre de leur projet de 2e année de licence à Orsay.

Suite de la conférence

Par **Etienne Ghys** (directeur de recherche, Ecole Normale Supérieure de Lyon), à la

Bibliothèque Nationale de France

Mercredi 15 mars

À 18h30

Journée portes ouvertes à la fac d'Orsay

Samedi 25 mars,

10h à 18h,

bâtiment 337